**Перечень некоторых дополнительных построений:**

1. Достраивание одной фигуры до другой. После выполнения такого построения можно воспользоваться признаками и свойствами новой фигуры.

*Пример 1*. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты ABDE и BCKF. Доказать, что отрезок DF в два раза больше медианы BP треугольника.

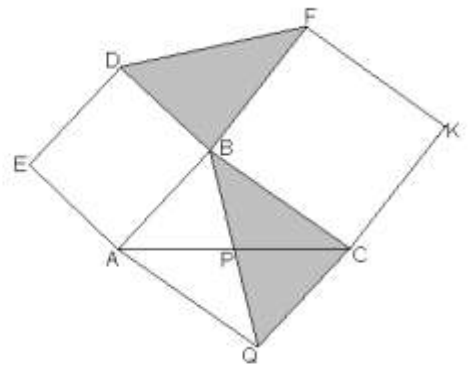


Рис. 1.

Достроим треугольник ABC до параллелограмма, а медиану BP продолжим до его диагонали (рис.1). Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle DBF = 180^0 - \alpha$, но и $\angle BCQ = 180^0 - \alpha$, а стороны, заключающие эти углы, также равны между собой, поэтому $\Delta DBF = \Delta QCB$. Следовательно, BQ = 2 BP = DF.

2. Удвоение медианы. Довольно часто, когда в условии задачи фигурирует медиана, бывает полезным продлить ее за точку, лежащую на стороне треугольника, на отрезок, равный самой медиане. Полученная новая точка соединяется с вершиной (вершинами) исходного треугольника, в результате чего образуются равные треугольники. Равенство соответствующих элементов этих треугольников помогает найти неизвестную величину или доказать предположенное утверждение.

*Пример 2*. В треугольнике ABC, BD – медиана. Докажите что BD>0,5(AB+BC).

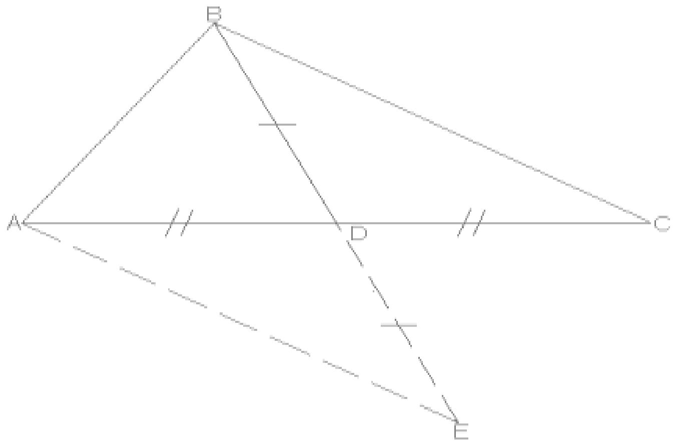

Рис. 2.

Продлим медиану BD на ее длину, полученную точку E соединим с вершиной A данного треугольника. Так как $\Delta ABD = \Delta ECD$ (по 2-м сторонам и углу между ними). Учитывая, что $BD < BC + CD$, получаем, что $2BD < BC + AB$ или $BD > 0{,}5(AB + BC)$.

3. <u>Проведение перпендикулярных или параллельных прямых.</u> В некоторых задачах прямой перпендикулярной или параллельной одной из имеющихся на чертеже позволяет воспользоваться признаком и (или) свойствами перпендикулярных прямых.

*Пример 3*. В квадрате ABCD проведены прямые ЕК и FZ, причем ЕК $\perp$ FZ и точка E принадлежит AD, точка K принадлежит BC, точка Z принадлежит DC, точка F принадлежит AB. Докажите, что ЕК = FZ.

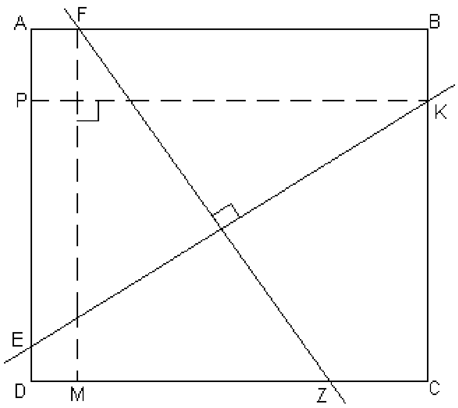

Рис. 3.

Выполним дополнительное построение: FM || BC и KP || CD. В результате этих построений можно сделать вывод, что $\Delta MFZ = \Delta DKE$:

1) прямоугольные,

2) FM = PK,

3) $\angle PKE = \angle MFZ$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), из чего следует EK = FZ

4. <u>построение вписанной и описанной окружности.</u> Построение вспомогательных окружностей (вписанных и описанных) дает возможность использовать свойства вписанных и описанных окружностей. Если есть прямой угол, то можно описать окружность – это признак выбора данного дополнительного построения.

*Пример 4*. В прямоугольнике ABC $\angle A = 90^0$, AH $\perp$ BC. Через H проведены прямые, образующие между собой прямой угол и пересекающие AB в точке D, AC в точке E. Докажите, что треугольники DHE и ABC подобны.

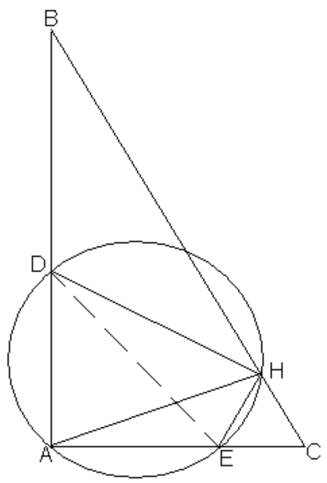

Рис. 4.

Увидев на чертеже прямоугольные треугольники с общей гипотенузой ($\Delta DAE$ и $\Delta DHE$), выполним дополнительное построение – описанную окружность на DE как диаметре (рис. 4). По условию $\angle DHE = \angle DAE$ (вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу DH) и $\angle DAH = \angle ACB$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), то $\angle DEH = \angle ACB$, и подобие треугольников доказано.

5. <u>Построение касательных и проведение радиусов в точки касания окружностей или окружности и прямой.</u> Иногда, когда в условии задачи встречаются две касающиеся друг друга окружности полезно провести радиусы в точку касания, тогда образуется прямая, которая содержит центры этих окружностей и точку их касания. Когда же встречается окружность касающаяся прямой, то проведение радиуса в точку касания влечет за собой появление прямого угла между касательной и радиусом, что значительно облегчает решения задачи или доказательство утверждения.

*Пример 5*. Дан прямоугольный треугольник ABC. Докажите, что $r = \dfrac{a + в - c}{2}$, где r – радиус вписанной окружности.

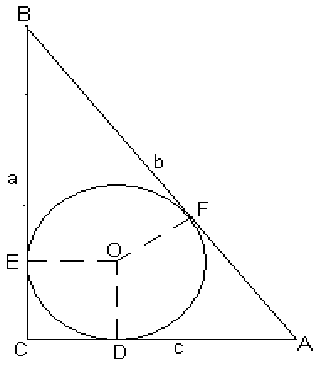

Рис.5.

Выполним дополнительное построение (рис. 5), проведем радиусы в точки касания OE, OD, OF. CEOD – квадрат, отсюда следует CE=EO=OD=CD=r, тогда BE=a–r, AD=c–r, BE=FB, AF=AD. c=BF+FA=BE+DA=a–r+в–r, c=a+в–2r, $r = \frac{a + в - c}{2}$

6. во многих геометрических задачах бывает полезным <u>продолжить отрезок (отрезки)</u> на определенное расстояние или до пересечения с заданной прямой. Данное дополнительное построение нами выделено самостоятельно.

*Пример 6*. Дан треугольник ABC. НА сторонах AB и BC взяты точки D и E таким образом, что ∠ ACB = 2 ∠ BED. Докажите, что AC + EC > AD.

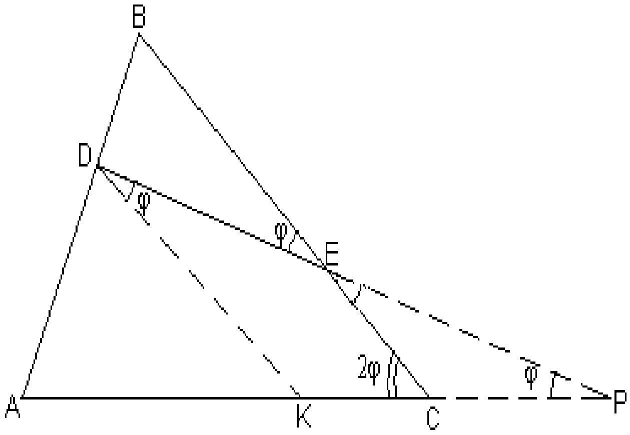

Рис. 6.

Продолжим DE до пересечения с прямой AC в точке P. Рассмотрим треугольник ADP. Пусть DEB = φ, тогда ∠CEP = φ и ∠ACE = 2φ, ∠ACE – внешний угол треугольника CEP, следовательно, ∠EPA=2φ-φ=φ. Треугольник CEP – равнобедренный, следовательно, PC = CE.

Сравнение AC + EC и AD сводится к сравнению сторон AP и AD треугольника ADP. Докажем, что ∠ADP > ∠DPA. Угол ∠ADP можно разбить на два угла лучом DK, параллельным BC. ∠EDK = φ, следовательно ∠ADP > φ и AP > AD, как сторона треугольника против большего угла.