Логарифмические уравнения

Логарифмическое уравнение — это любое уравнение, которое сводится к виду

$\log_a f(x) = k$, где $a > 0$, $a \neq 1$ — основание логарифма, $f(x)$ — произвольная функция,

k — некоторая постоянная.

Такое уравнение решается внесением постоянной k под знак логарифма:$k = \log_a a^k$. Основание нового логарифма равно основанию исходного. Получим уравнение $\log_a f(x) = \log_a a^k$, которое решается отбрасыванием логарифма.

Заметим, что по условию $a > 0$, поэтому $f(x) = a^k > 0$, т.е. исходный логарифм существует.

Задача. Решить уравнение: $\log_7 (8 - x) = 2$.

Решение. $\log_7 (8 - x) = 2 \Leftrightarrow \log_7 (8 - x) = \log_7 7^2 \Leftrightarrow 8 - x = 49 \Leftrightarrow x = -41$. Ответ: -41

Задача. Решить уравнение: $\log_{0,5} (6 - x) = -2$.

Решение. $\log_{0,5} (6 - x) = -2 \Leftrightarrow \log_{0,5} (6 - x) = \log_{0,5} 0,5^{-2} \Leftrightarrow 6 - x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. Ответ: 2

Но что делать, если исходное уравнение окажется сложнее, чем стандартное

$\log_a f(x) = k$? Тогда сводим его к стандартному, собирая все логарифмы в одной стороне, а числа — в другой.

Если в исходном уравнении присутствует более одного логарифма, придется искать область допустимых значений (ОДЗ) каждой функции, стоящей под логарифмом. Иначе могут появиться лишние корни.

Задача. Решить уравнение: $\log_5 (x + 1) + \log_5 (x + 5) = 1$.

Поскольку в уравнении присутствуют два логарифма, найдем ОДЗ:

1. $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
2. $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

Получаем, что ОДЗ — это интервал $(-1, +\infty)$. Теперь решаем уравнение:

$\log_5 (x + 1) + \log_5 (x + 5) = 1$

$\log_5 (x + 1)(x + 5) = 1$

$\log_5 (x + 1)(x + 5) = \log_5 5^1$

$(x + 1)(x + 5) = 5$

$x^2 + 6x + 5 = 5$

$x (x + 6) = 0 \quad x_1 = 0, x_2 = -6.$

Но $x_2 = -6$ не подходит по ОДЗ. Остается корень $x_1 = 0$. Ответ: 0

Показательные уравнения

Показательное уравнение — это любое уравнение, которое сводится к виду $a^{f(x)} = k$, где $a > 0$, $a \neq 1$ — основание степени, $f(x)$ — произвольная функция, k — некоторая постоянная.

Это определение почти дословно повторяет определение логарифмического уравнения. Решаются показательные уравнения даже проще, чем логарифмические, ведь здесь не требуется, чтобы функция$f(x)$ была положительна.

Для решения сделаем замену $k = a^t$, где t — вообще говоря, логарифм ($t= \log_a k$), но в ЕГЭ числа a и k будут подобраны так, что найти t будет легко. В полученном уравнении $a^{f(x)} = a^t$ основания равны, а значит, равны и показатели, т.е. $f(x) = t$. Решение последнего уравнения, как правило, не вызывает проблем.

Задача. Решить уравнение: $7^{x-2} = 49$.

Решение. $7^{x-2} = 49 \Leftrightarrow 7^{x-2} = 7^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Задача. Решить уравнение: $6^{16-x} = 1/36$.

Решение. $6^{16-x} = 1/36 \Leftrightarrow 6^{16-x} = 6^{-2} \Leftrightarrow 16 - x = -2 \Leftrightarrow x = 18$. Ответ: 18

Немного о преобразовании показательных уравнений. Если исходное уравнение отличается от $a^{f(x)} = k$, применяем правила работы со степенями:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $a^n / a^m = a^{n-m}$,
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Кроме того, надо знать правила замены корней и дробей на степени с рациональным показателем:

$$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}};\ \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Такие уравнения встречаются в ЕГЭ крайне редко, но без них разбор задачи B7 был бы неполным.

Задача. Решить уравнение: $(5/7)^{x-2} \cdot (7/5)^{2x-1} = 125/343$

Заметим, что:

1. $(7/5)^{2x-1} = ((5/7)^{-1})^{2x-1} = (5/7)^{1-2x}$,
2. $125/343 = (5^{3)}/(7^3) = (5/7)^3$.

Имеем: $(5/7)^{x-2} \cdot (7/5)^{2x-1} = 125/343 \Leftrightarrow (5/7)^{x-2} \cdot (5/7)^{1-2x} = (5/7)^3 \Leftrightarrow (5/7)^{x-2+1-2x} = (5/7)^3 \Leftrightarrow (5/7)^{-x-1} = (5/7)^3 \Leftrightarrow -x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = -4$. Ответ: - 4

Иррациональные уравнения

Под иррациональным уравнением понимается любое уравнение, содержащее знак корня. Из всего многообразия иррациональных уравнений мы рассмотрим лишь простейший случай, когда уравнение имеет вид:

$\sqrt{f(x)} = a$, где $a \geq 0$

Чтобы решить такое уравнение, возведем обе стороны в квадрат.

Получим уравнение $f(x) = a^2$. При этом автоматически выполняется требование ОДЗ: $f(x) \geq 0$, т.к. $a^2 \geq 0$. Остается решить несложное уравнение $f(x) = a^2$.

Задача. Решить уравнение:

$\sqrt{5x - 6} = 8$

Возводим обе стороны в квадрат и получим: $5x - 6 = 8^2$

$5x - 6 = 64$

$5x = 70$

$x = 14$.

Ответ: 14

Задача. Решить уравнение:

$$\sqrt{-\frac{x + 24}{5x}} = 1$$

Сначала возводим обе стороны в квадрат.

А затем внесем знак «минус» в числитель.

Имеем:

$$-\frac{x + 24}{5x} = 1^2 \Leftrightarrow -x - 24 = 5x \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = -4$$

Заметим, что при $x = -4$ под корнем будет положительное число, т.е. требование ОДЗ выполнено.

Ответ: -4

Вычисление точек максимума и минимума

Иногда вместо графика функции в задаче B8 дается график производной и требуется найти точку максимума или минимума функции. Для начала определимся с терминологией:

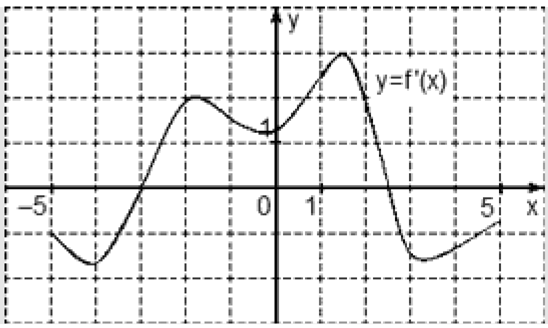
1. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f(x), если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: $f(x_0) \geq f(x)$.
2. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f(x), если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: $f(x_0) \leq f(x)$.

Для того чтобы найти точки максимума и минимума по графику производной, достаточно выполнить следующие шаги:

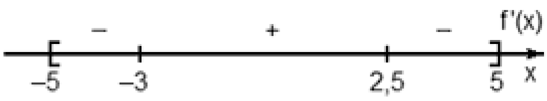
1. Перечертить график производной, убрав всю лишнюю информацию. Как показывает практика, лишние данные только мешают решению. Поэтому отмечаем на координатной оси нули производной — и все.
2. Выяснить знаки производной на промежутках между нулями. Если для некоторой точки x_0 известно, что $f'(x_0) \neq 0$, то возможны лишь два варианта: $f'(x_0) \geq 0$ или $f'(x_0) \leq 0$. Знак производной легко определить по исходному чертежу: если график производной лежит выше оси OX, значит $f'(x) \geq 0$. И наоборот, если график производной проходит под осью OX, то $f'(x) \leq 0$.
3. Снова проверяем нули и знаки производной. Там, где знак меняется с минуса на плюс, находится точка минимума. И наоборот, если знак производной меняется с плюса на минус, это точка максимума. Отсчет всегда ведется слева направо.

Эта схема работает только для непрерывных функций — других в задаче B9 не встречается.

Задача. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−5; 5]. Найдите точку минимума функции f(x) на этом отрезке.

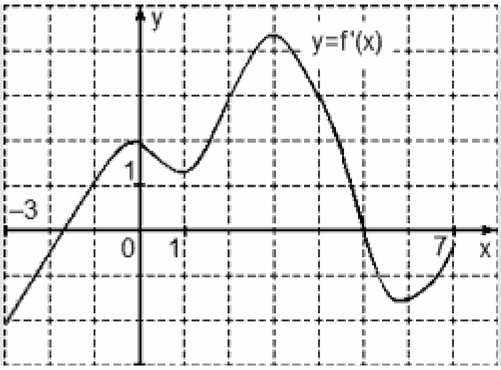


Избавимся от лишней информации — оставим только границы [−5; 5] и нули производной x = −3 и x = 2,5. Также отметим знаки:

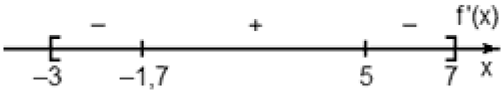


Очевидно, в точке x = −3 знак производной меняется с минуса на плюс. Это и есть точка минимума.

Задача. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−3; 7]. Найдите точку максимума функции f(x) на этом отрезке.

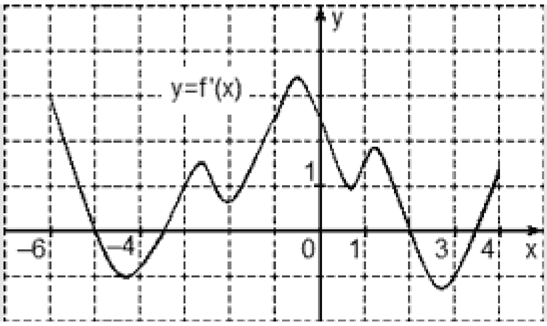


Перечертим график, оставив на координатной оси только границы [−3; 7] и нули производной x = −1,7 и x = 5. Отметим на полученном графике знаки производной. Имеем:

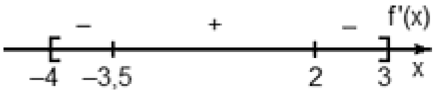


Очевидно, в точке x = 5 знак производной меняется с плюса на минус — это точка максимума.

Задача. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−6; 4]. Найдите количество точек максимума функции f(x), принадлежащих отрезку [−4; 3].



Из условия задачи следует, что достаточно рассмотреть только часть графика, ограниченную отрезком [−4; 3]. Поэтому строим новый график, на котором отмечаем только границы [−4; 3] и нули производной внутри него. А именно, точки x = −3,5 и x = 2. Получаем:



На этом графике есть лишь одна точка максимума x = 2. Именно в ней знак производной меняется с плюса на минус.

Ответ: 2

Задачи на максимальное/минимальное значение

Если в задаче B14 требуется найти *максимальное или минимальное значение* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, выполняем следующие действия:

1. Найти производную функции: $f'(x)$;
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$. Если корней нет, пропускаем третий шаг и переходим сразу к четвертому;
3. Из полученного набора корней вычеркнуть все, что лежит за пределами отрезка $[a; b]$. Оставшиеся числа обозначим $x_1, x_2, ..., x_n$ — их, как правило, будет немного;
4. Подставим концы отрезка $[a; b]$ и точки $x_1, x_2, ..., x_n$ в исходную функцию. Получим набор чисел $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$, из которого выбираем наибольше или наименьшее значение — это и будет ответ.

Небольшое пояснение по поводу вычеркивания корней, когда они совпадают с концами отрезка. Такое вполне может встретиться на настоящем экзамене. Эти точки можно вычеркнуть, поскольку на четвертом шаге концы отрезка все равно подставляются в функцию — даже если уравнение $f'(x) = 0$ не имело решений.

Также следует внимательно читать условие задачи. Когда требуется найти *значение функции* (максимальное или минимальное), концы отрезка и точки $x_1, x_2, ..., x_n$ подставляются именно *в функцию*, а не в ее производную.

Задача. Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[-5; 0]$:

$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$

Для начала найдем производную:

$y' = (x^3 + 3x^2 - 9x - 7)' = 3x^2 + 6x - 9$

Затем приравняем ее к нулю:

$y' = 0;$
$3x^2 + 6x - 9 = 0;$
...
$x_1 = -3; x_2 = 1.$

Вычеркиваем корень $x = 1$, поскольку он не принадлежит отрезку $[-5; 0]$.Осталось вычислить значение функции на концах отрезка и в точке $x = -3$. Имеем:

$y(-5) = (-5)^3 + 3 \cdot (-5)^2 - 9 \cdot (-5) - 7 = -12;$
$y(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 7 = 20;$
$y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 - 7 = -7.$

Очевидно, что наибольшее значение равно 20 — оно достигается в точке $x = -3$.

Ответ: 20

Задачи на точки максимума/минимума

Рассмотрим случай, когда требуется найти *точку максимума или минимума* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Если отрезок не задан, функция рассматривается на своей области определения. В любом случае, схема решения такова:

1. Найти производную функции: $f'(x)$;
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$. Если производная — дробно-рациональная функция, дополнительно выясняем, когда ее знаменатель равен нулю. Полученные корни обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
3. Отметить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на координатной прямой и расставить знаки, которые принимает производная между этими числами. Если задан отрезок $[a; b]$, отмечаем его и вычеркиваем все, что лежит за его пределами;
4. Среди оставшихся точек ищем ту, где знак производной меняется с минуса на плюс (это точка минимума) или с плюса на минус (точка максимума). Такая точка должна быть только одна — это и будет ответ.

Задача. Найдите точку максимума функции на отрезке $[-10; -1]$:

$$y = \frac{x^2 - 8x + 25}{x}$$

Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 8x + 25}{x}\right)' = \cdots = \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

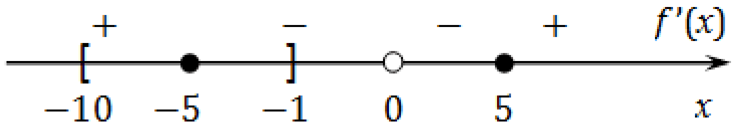
Поскольку это дробно-рациональная функция, приравниваем к нулю числитель:

$x^2 - 25 = 0;\ x_1 = 5;\ x_2 = -5.$

Получили два корня. Теперь приравниваем к нулю знаменатель:

$x^2 = 0;\ x = 0.$

Получили $x = 0$ — корень второй кратности. При переходе через него знак производной не меняется. Осталось отметить точки $x = -5$; $x = 0$; $x = 5$ на координатной прямой, а затем расставить знаки и границы. Имеем:



Очевидно, что внутри отрезка останется лишь одна точка $x = -5$, в которой знак производной меняется с плюса на минус. Это и есть точка максимума.

Ответ: - 5